5. Aufgabenblatt: Analysis 2

Lehrkräfteweiterbildung, 13 Q, 13 R, Winter 2024/25
Dozent: Hans-Joachim von Höhne

Aufgabe 5.1 Untersuchen Sie, ob folgende uneigentlichen Integrale konvergieren, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

$$1)\quad \int_0^1 \ln x \, dx \ , \qquad\qquad 2)\quad \int_1^3 \frac{2}{x \ln x} \, dx \ ,$$

$$3)\quad \int_0^\infty x \, e^{-x^2} \, dx \ , \qquad\qquad 4)\quad \int_0^\infty x \, \sin(x^2) \, dx \ ,$$

$$5)\quad \int_0^\infty \frac{3\,x}{1+x^2} \, dx \ .$$

Aufgabe 5.2 Untersuchen Sie mit dem Integralkriterium, ob folgende Reihe konvergiert.

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$$

Aufgabe 5.3 1) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ monoton fallend und beschränkt ist.

$$a_n \ := \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ - \ln n$$

Somit existiert folgender Grenzwert, die *Euler-Mascheroni-Konstante*.

$$\gamma \ := \ \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \ - \ \ln n) \ \approx \ 0,577216$$

2) Sei N die Anzahl der Sekunden, die seit dem Urknall vor 13,8 Milliarden Jahren vergangen sind. Wie groß ist dann $\sum_{k=1}^{N} 1/k$ ungefähr?

Hinweis zu 1): die ersten beiden Zeilen des Beweises von Satz 3.4 verwenden.

Aufgabe 5.4 Die Kugel K vom Radius R ist der Rotationskörper folgender Funktion.

$$f : [-R\,,\,R] \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Berechnen Sie das Volumen und den Inhalt der Oberfläche von K.